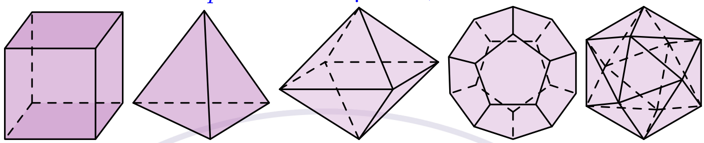
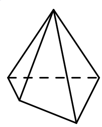
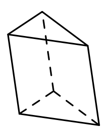
KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

Khối đa diện đều cạnh a loại $\{n, p\}$ có số đỉnh D, số cạnh C, số mặt M,
$nM = pD = 2C$ hoặc $M + D - C = 2$.

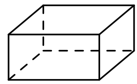
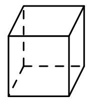
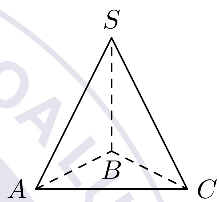
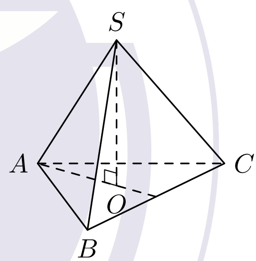
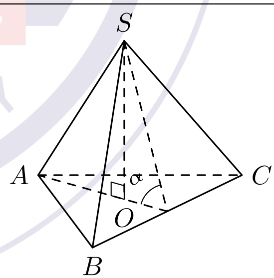
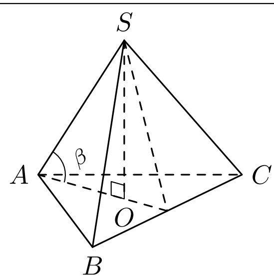


Khối đa diện đều	D	M	C	$\{n, p\}$	Thể tích	Số mp đối xứng
Tứ diện đều	4	4	6	$\{3, 3\}$	$V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$	6
Khối lập phương	8	6	12	$\{4, 3\}$	$V = a^3$	9
Khối bát diện đều	6	8	12	$\{3, 4\}$	$V = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$	9
Khối 12 mặt đều	20	12	30	$\{5, 3\}$	$V = \dfrac{15 + 7\sqrt{5}}{4}a^3$	15
Khối 20 mặt đều	12	20	30	$\{3, 5\}$	$V = \dfrac{15 + 5\sqrt{5}}{12}a^3$	15

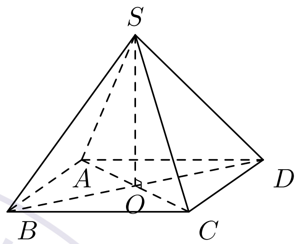
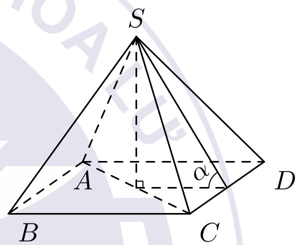
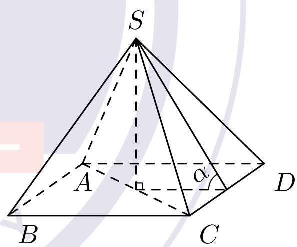
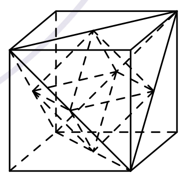
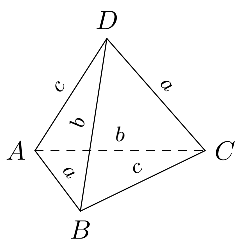
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích	Hình vẽ
Thể tích khối chóp $\boxed{V = \dfrac{1}{3}Sh}$	
Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V = Sh}$	

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

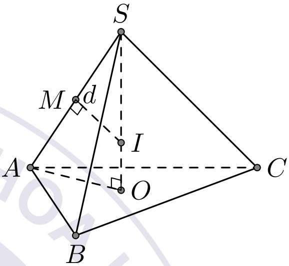
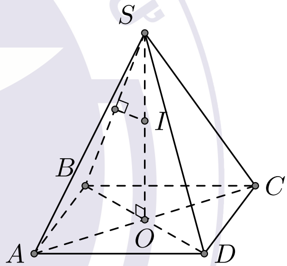
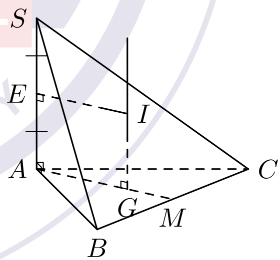
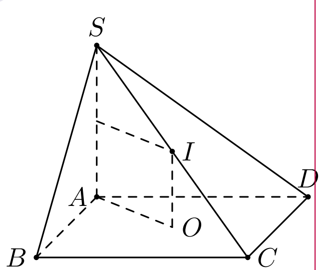
Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$	
Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$	
Thể tích khối chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng (SAB), (SAC), (SBC) vuông góc với nhau từng đôi một và diện tích tam giác SAB, SAC, SBC lần lượt là S_1, S_2, S_3. $\boxed{V = \dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{2}}$	
Thể tích khối chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng b là $\boxed{V = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}}$	
Thể tích khối chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng α là $\boxed{V = \dfrac{a^3 \tan\alpha}{24}}$	
Thể tích khối chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng β là $\boxed{V = \dfrac{a^3 \tan\beta}{12}}$	

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

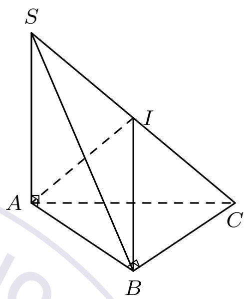
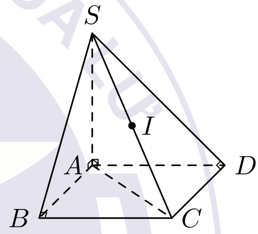
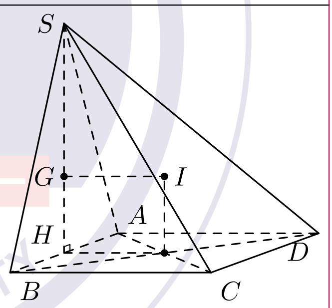
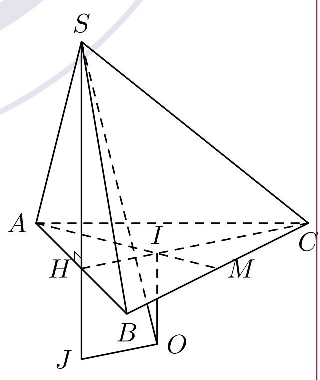
Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng b là $\boxed{V = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}}$	
Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng α là $\boxed{V = \dfrac{a^3 \tan\alpha}{6}}$	
Thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b, mặt bên tạo với đáy một góc bằng α là $\boxed{V = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{b^3 \tan\alpha}{\sqrt{(\tan^2\alpha + 2)^3}}}$	
Thể tích khối bát diện đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a có thể tích $\boxed{V = \dfrac{a^3}{6}}$	
Thể tích của tứ diện gần đều $ABCD$ biết $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$ là $\boxed{V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}}$	

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ HOA LU UNIVERSITY

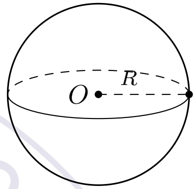
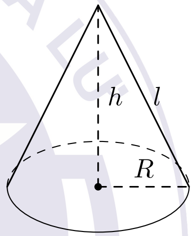
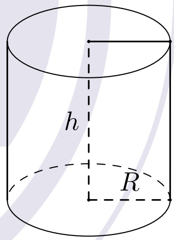
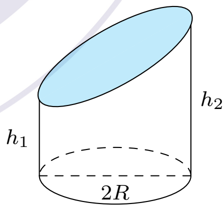
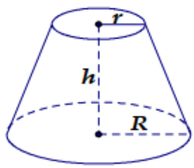
MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

Bài toán	Công thức	Hình vẽ
1.Hình chóp đều: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều cạnh bên $SA = a$, chiều cao $SO = h$, có tâm I và bán kính R	$R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{a^2}{2h}$	 
2.Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy: Cho hình chóp có cạnh bên $SA = h$ vuông góc với đáy, bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy r. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính R	$R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$	 

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ HOA LU UNIVERSITY

3.Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới một góc vuông: -Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90°$, I là trung điểm SC. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I và bán kính R. - Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90°$, I là trung điểm SC. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I và bán kính R.	$\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$	 
4.Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy: Cho hình chóp có mặt bên SAB vuông góc với đáy, R_b, R_d lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB và đa giác đáy, h là độ dài giao tuyến của mặt bên và đáy. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I và bán kính R	$\boxed{R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \dfrac{h^2}{4}}}$	 

CÔNG THỨC DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

	Công thức	Hình vẽ
Hình cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 4\pi R^2 \\ V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$	
Hình nón	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R l \\ S_{tp} = \pi R(R + l) \\ V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h \end{cases}$	
Hình trụ	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi R h \\ V = \pi R^2 h \end{cases}$	
Hình trụ cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2) \\ V = \pi R^2 \cdot \dfrac{h_1 + h_2}{2} \end{cases}$	
Hình nón cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi l(r + R) \\ V = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \end{cases}$	

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Toạ độ của một điểm

Tính chất của điểm M	Toạ độ điểm M
Gốc toạ độ O	$O(0;0;0)$
M thuộc trục Ox	$M\left(x_M;0;0\right)$
M thuộc trục Oy	$M\left(0;y_M;0\right)$
M thuộc trục Oz	$M\left(0;0;z_M\right)$
M thuộc mặt phẳng (Oxy)	$M\left(x_M;y_M;0\right)$
M thuộc mặt phẳng (Oxz)	$M\left(x_M;0;z_M\right)$
M thuộc mặt phẳng (Oyz)	$M\left(0;y_M;z_M\right)$
M là trung điểm của đoạn thẳng AB	$M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
M chia đoạn AB theo tỉ số $k\neq 1$	$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k}\\ y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k}\\ z_M=\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}\end{cases}$
G là trọng tâm của tam giác ABC	$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$
I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC	$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A\cdot BC+x_B\cdot CA+x_C\cdot AB}{AB+BC+CA}\\ y_I=\dfrac{y_A\cdot BC+y_B\cdot CA+y_C\cdot AB}{AB+BC+CA}\\ z_I=\dfrac{z_A\cdot BC+z_B\cdot AC+z_C\cdot AB}{AB+BC+CA}\end{cases}$

Trong không gian $Oxyz$ cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.

Biểu thức toạ độ của các phép toán véc-tơ

1	$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
2	$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
3	$k.\vec{a} = (k.a_1; k.a_2; k.a_3)$ (k là một số thực)
4	$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
5	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
6	Với $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì véc-tơ $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ khi và chỉ khi có một số k sao cho $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = k$.

Tích vô hướng và ứng dụng

1	Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert . \left\lvert\vec{b}\right\rvert . \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
2	Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ là $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
3	$AB = \left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
4	Góc giữa hai véc-tơ: Nếu φ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$
5	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

Tích có hướng của hai véc-tơ và ứng dụng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

1	Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $$\begin{aligned}\left[\vec{a},\vec{b}\right] &= \left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\\ &= (a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}$$
2	$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
3	$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$; $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
4	$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=-\left[\vec{b};\vec{a}\right]$
5	Ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0$
6	A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$
7	Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right\|$
8	Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$
9	Thể tích hình hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right\|$
10	Thể tích hình tứ diện là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right\|$

Hình chiếu vuông góc của điểm lên các trục và mặt phẳng toạ độ

Xét điểm $M(x_M;y_M;z_M)$. Khi đó toạ độ hình chiếu vuông góc của M lên

trục Ox là $M_x\,(x_M;0;0)$	lên trục Oy là $M_y(0;y_M;0)$
trục Oz là $M_z(0;0;z_M)$	mặt phẳng (Oxy) là $M_{xy}(x_M;y_M;0)$
mặt phẳng (Oxz) là $M_{xz}(x_M;0;z_M)$	mặt phẳng (Oyz) là $M_{yz}(0;y_M;z_M)$

Một số bài toán về tam giác

Xét tam giác ABC, ta có

Bài toán	Công thức
A' là chân đường cao kẻ từ A của $\triangle ABC$	$\begin{cases}\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}\right] = \vec{0}\end{cases}$
H là trực tâm $\triangle ABC$	$\begin{cases}\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AH} = 0\end{cases}$
D là chân đường phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$	$\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$
E là chân đường phân giác ngoài của góc A của $\triangle ABC$	$\overrightarrow{EB} = \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$
I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$	$\begin{cases}IA = IB = IC \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}IA = IB = IC \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \cdot \overrightarrow{AI} = 0\end{cases}$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$	$R = \dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{2\left\|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right\|}$
Đường phân giác trong của góc A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$	$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}$
Đường phân giác ngoài của góc A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$	$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} - \dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}$

Các trường hợp riêng của phương trình mặt phẳng (α): $Ax + By + CZ + D = 0$

Tính chất của mặt phẳng (α)	Phương trình mặt phẳng (α)
(α) đi qua gốc toạ độ	$Ax + By + Cz = 0$
$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$	$By + Cz + D = 0$
$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$	$Ax + Cz + D = 0$
$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$	$Ax + By + D = 0$
$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$	$Cz + D = 0$
$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$	$Ax + D = 0$
$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$	$By + D = 0$
(α) cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, trục Oy tại $B(0;b;0)$, trục Oz tại $C(0;0;c)$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ $(a,\ b,\ c \neq 0)$

Bài toán về phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn

Giả sử mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt các trục toạ độ lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$. Khi đó

Nếu M là trọng tâm tam giác ABC thì	$\begin{cases} a = 3x_M \\ b = 3y_M \\ c = 3z_M \end{cases}$
Nếu M là trực tâm tam giác ABC thì	$\overrightarrow{OM} = \vec{n}_P$
Nếu $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ nhỏ nhất thì	M là trực tâm tam giác ABC

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon A_1x+B_1y+C_1Z+D_1=0$ và $(\beta)\colon A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0$. Khi đó

$(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$	$(\alpha)\parallel(\beta)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$
$(\alpha)\cap(\beta)\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ hoặc $\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$	$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+CZ+D=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ và đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó

$\Delta\cap(\alpha)$	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0\Leftrightarrow aA+bB+cC\neq 0$
$\Delta\parallel(\alpha)$	$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n}=0\\ M)\notin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}aA+bB+cC=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0\end{cases}$
$\Delta\subset(\alpha)$	$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{n}=0\\ M\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}aA+bB+cC=0\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\end{cases}$
$\Delta\perp(\alpha)$	$\vec{u}=k\vec{n}\Leftrightarrow A:B:C=a:b:c$

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho đường thẳng Δ_1 đi qua điểm M_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm M_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2$. Khi đó

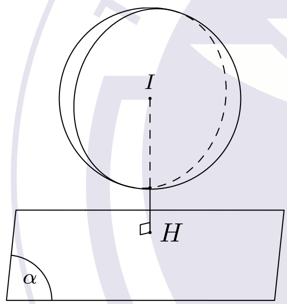
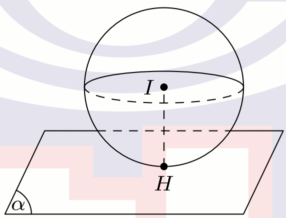
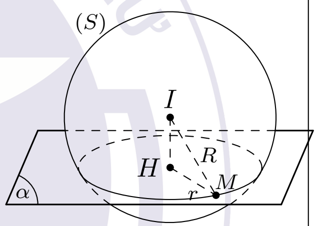
$\Delta_1\cap\Delta_2$	$\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq 0\end{cases}$
$\Delta_1\parallel\Delta_2$	$\begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0\\ [\vec{u}_1,\vec{u}_2]=0\end{cases}$
$\Delta_1\equiv\Delta_2$	$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=0$
Δ_1 và Δ_2 chéo nhau	$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$

Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) lần lượt có phương trình

$$(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0;\ (S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R. Gọi $\mathrm{d}(I,(\alpha))=IH=\mathrm{d}$. Khi đó

$\mathrm{d}>R$	$\mathrm{d}=R$	$\mathrm{d}<R$
Mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) không có điểm chung	Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H	Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu S theo đường tròn tâm H, bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$
		

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt cầu (S) có phương trình

$$(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R. Gọi $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|[\overrightarrow{IM},\vec{u}]|}{|\vec{u}|}=\mathrm{d}$. Khi đó

$\mathrm{d}>R$	Δ không cắt (S)
$\mathrm{d}=R$	Δ tiếp xúc (S)
$\mathrm{d}<R$	Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B và AB vuông góc với đường kính của mặt cầu (S)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

Góc trong không gian

1	**Góc giữa hai đường thẳng:** Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1=(a;b;c)$ và Δ_2 có VTCP $\vec{u}_2=(a';b';c')$ thì $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\cos\varphi$ $$\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\rvert}{\lvert\vec{u}_1\rvert\cdot\lvert\vec{u}_2\rvert}=\frac{\lvert aa'+bb'+cc'\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$
2	**Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:** Nếu φ là góc giữa đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng α có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ thì $\sin(\Delta,\alpha)=\sin\varphi$ $$\sin\varphi=\frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}=\frac{\lvert Aa+Bb+Cc\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
3	**Góc giữa hai mặt phẳng:** Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha)\colon A_1x+B_1y+C_1Z+D_1=0$ và $(\beta)\colon A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0$ thì $\cos((\alpha),(\beta))=\cos\varphi$ $$\cos\varphi=\frac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Khoảng cách

1	**Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:** Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax+By+CZ+D=0$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó $$\mathrm{d}(M,(\alpha))=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
2	**Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng:** Cho đường thẳng Δ đi qua điểm A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó $$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{\lvert[\vec{u},\overrightarrow{AM}]\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$$
3	**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:** Cho đường thẳng Δ_1 đi qua điểm A có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm B có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2$. Khi đó $$\mathrm{d}(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\lvert[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{AB}\rvert}{\lvert[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\rvert}$$

BÀI TOÁN THỰC TẾ MŨ VÀ LÔGARIT

Bài toán	Công thức
Lãi đơn: Gửi vào ngân hàng số tiền A với lãi đơn mỗi kỳ hạn là r, sau mỗi kỳ hạn số tiền lãi chỉ được tính trên số tiền gốc A. Sau n kỳ hạn thì số tiền nhận được là S_n:	$S_n = A(1 + n\,r)$
Lãi kép: Gửi vào ngân hàng số tiền A với lãi kép mỗi kỳ hạn là r, sau mỗi kỳ hạn số tiền lãi được tính trên số tiền gốc A và toàn bộ số tiền lãi phát sinh trước đó. Sau n kỳ hạn thì số tiền nhận được là S_n:	$S_n = A(1 + r)^n$
Tiền gửi tích lũy: Đầu mỗi tháng gửi số tiền A với lãi kép hàng tháng là r. Sau n tháng thì số tiền nhận được là S_n:	$S_n = \frac{A}{r}\Big((1 + r)^n - 1\Big)(1 + r)$
Gửi tiền và rút hàng tháng: Gửi vào ngân hàng số tiền A với lãi kép hàng tháng là r, mỗi tháng rút ra số tiền X. Sau n tháng thì số tiền còn lại là S_n:	$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
Vay vốn trả góp: Vay số tiền A với lãi kép hàng tháng là r, mỗi tháng trả số tiền X. Sau n tháng thì số tiền còn nợ là S_n:	$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
Tăng lương: Lương khởi điểm là A/tháng, mỗi kì hạn k tháng thì lương tăng thêm r. Sau n kì hạn thì lương nhận được là: $L_n = A(1 + r)^n$ và tổng số tiền lương nhận được là S_n:	$S_n = kA\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
Tăng trưởng dân số: Dân số ban đầu là A, tỷ lệ tăng dân số hàng năm là r. Sau n năm thì dân số được ước tính là S_n:	$S_n = Ae^{n\,r}$

HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(ab < 0)$ có 3 điểm cực trị là:

$$A(0, c);\ B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}, -\frac{\Delta}{4a}\right);\ C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

tạo thành tam giác ABC.

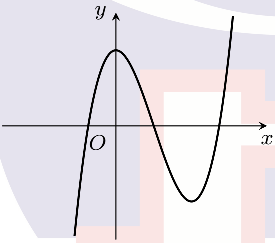
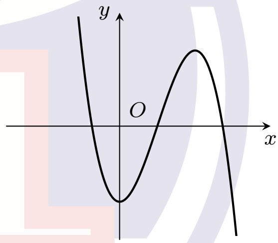
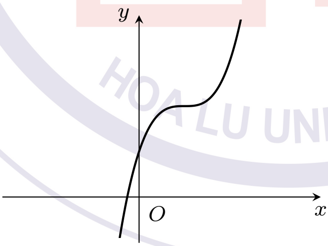
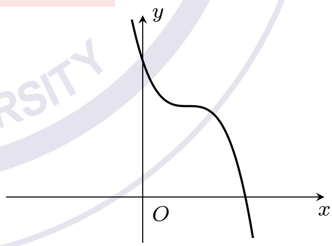
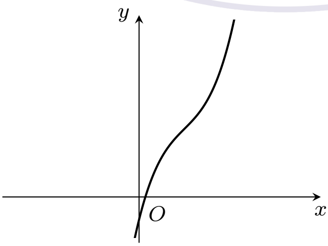
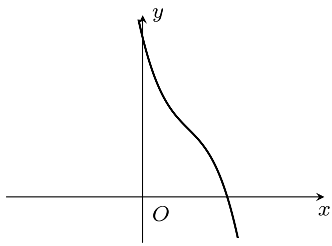
Tam giác ABC vuông cân tại A	$\frac{b^3}{8a} + 1 = 0$
Tam giác ABC đều	$\frac{b^3}{8a} + 3 = 0$
Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = \alpha$	$\tan^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
Diện tích tam giác ABC	$S = \frac{b^2}{4\lvert a\rvert}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC	$R = \frac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$

ĐỒ THỊ HÀM SỐ

SƠ ĐỒ KHẢO SÁT

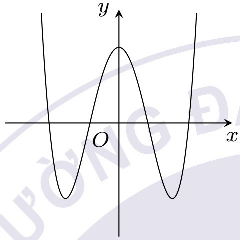
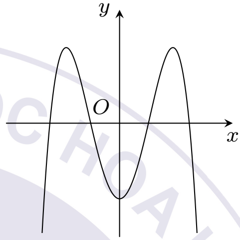
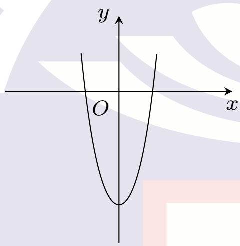
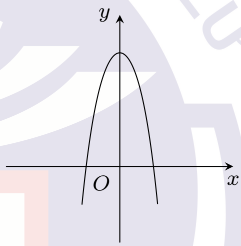
- Tìm tập xác định
- Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ (nếu có)
- Tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng (nếu có)
- Lập bảng biến thiên
- Vẽ đồ thị

Đồ thị hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$

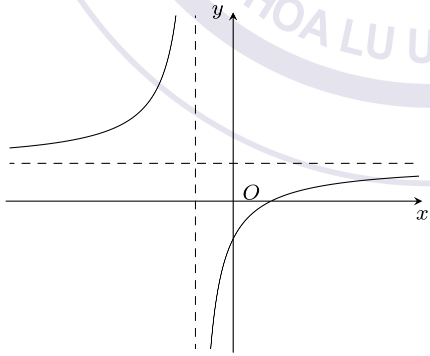
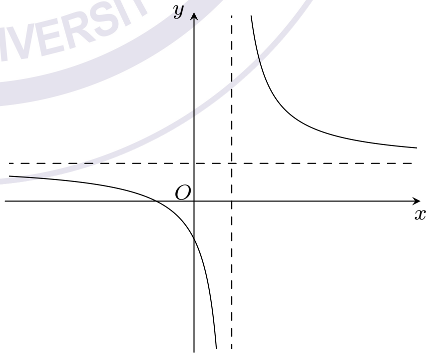
Dấu a	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
$y' = 0$ có nghiệm kép		
$y' = 0$ vô nghiệm		

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$, với $a \neq 0$

Dấu a	$a > 0$	$a < 0$
$a \cdot b < 0$		
$a \cdot b \geq 0$		

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$
	

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

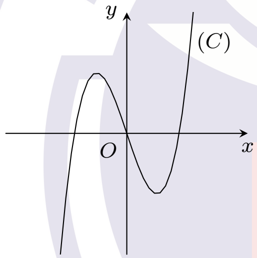
Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

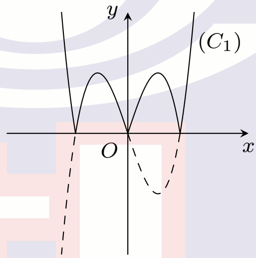
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Gọi (C_1) là đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$, ta có

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Đồ thị (C_1) gồm 2 phần :

- Phần 1: Vẽ lại phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox.
- Phần 2 : Vẽ đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox.

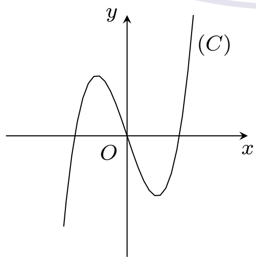


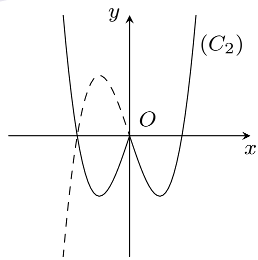


Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Gọi (C_2) là đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$.
Đồ thị (C_2) gồm 2 phần :

- Phần 1 : Vẽ lại phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy.
- Phần 2 : Vẽ đối xứng qua trục Oy của phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy.





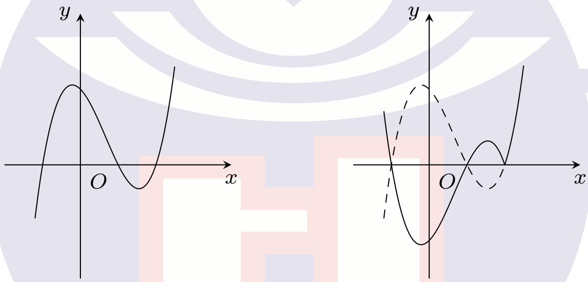
Đồ thị hàm số dạng $y = |u(x)| \cdot v(x)$

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = u(x) \cdot v(x)$, (C_3) là đồ thị của hàm số $y = |u(x)| \cdot v(x)$, ta có

$$y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) & \text{nếu } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) & \text{nếu } u(x) < 0 \end{cases}$$

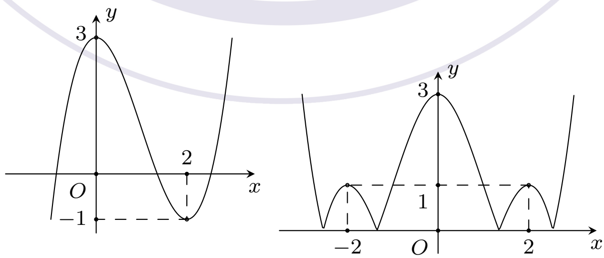
Đồ thị (C_3) gồm 2 phần :

- Phần 1 : Vẽ lại phần đồ thị (C) trên miền x sao cho $u(x) \geq 0$.
- Phần 2 : Vẽ đối xứng qua trục Ox của phần đồ thị (C) trên miền x sao cho $u(x) < 0$.



Đồ thị hàm số dạng $y = |f(|x|)|$

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, (C_4) là đồ thị của hàm số $y = |f(|x|)|$.
Đồ thị (C_4): Ta lần lượt biến đổi hai đồ thị $y = |f(x)|$ và $y = f(|x|)$.



MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), suy ra đồ thị (C') của hàm số sau:

1	$y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Oy
2	$y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua trục Ox
3	$y = f(x) + a$, $a > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) lên trên a đơn vị
4	$y = f(x) - a$, $a > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) xuống dưới a đơn vị
5	$y = f(x + b)$, $b > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang trái b đơn vị
6	$y = f(x - b)$, $b > 0$	Tịnh tiến đồ thị (C) sang phải b đơn vị
7	$y = f(k \cdot x)$, $k > 1$	Co đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số k
8	$y = f(k \cdot x)$, $0 < k < 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều ngang hệ số $\frac{1}{k}$
9	$y = k \cdot f(x)$, $k > 1$	Giãn đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số k
10	$y = k \cdot f(x)$, $0 < k < 1$	Co đồ thị (C) theo chiều dọc hệ số $\frac{1}{k}$
11	$y = \lvert f(x) \rvert + m$	-Vẽ đồ thị $y = \lvert f(x) \rvert$ -Tịnh tiến đồ thị lên m đơn vị nếu $m > 0$ hoặc xuống $\lvert m \rvert$ đơn vị nếu $m < 0$
12	$y = \lvert f(x + m) \rvert$	-Tịnh tiến đồ thị sang phải $\lvert m \rvert$ đơn vị nếu $m < 0$ hoặc sang trái m đơn vị nếu $m > 0$ -Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị hàm số $y = \lvert f(x) \rvert$
13	$y = f(\lvert x \rvert + m)$	-Tịnh tiến đồ thị sang phải $\lvert m \rvert$ đơn vị nếu $m < 0$ hoặc sang trái m đơn vị nếu $m > 0$ -Sau đó vẽ như cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(\lvert x \rvert)$
14	$y = f(\lvert x + m \rvert)$	-Vẽ đồ thị hàm $y = f(\lvert x \rvert)$ -Tịnh tiến đồ thị sang phải $\lvert m \rvert$ đơn vị nếu $m < 0$ hoặc sang trái m đơn vị nếu $m > 0$

DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

Cho (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d.

Công thức số hạng tổng quát của dãy	$u_n = u_1 + (n-1)d, \quad n \geq 2$
Tính chất các số hạng của cấp số cộng	$u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \quad k \geq 2$
Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng	$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \\ &= nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, \quad n \geq 1 \end{aligned}$

Cho (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q.

Công thức số hạng tổng quát của dãy	$u_n = u_1.q^{n-1}, \quad n \geq 2$
Tính chất các số hạng của cấp số cộng	$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}, \quad k \geq 2$
Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân	$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ với $q \neq 1$. $S_n = n.u_1$ với $q = 1$.
Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $(u_n), \lvert q\rvert < 1$	$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + ... = \dfrac{u_1}{1-q}$

Một số công thức đặc biệt

1	$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$
2	$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, n \in \mathbb{N}^*$
3	$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, n \in \mathbb{N}^*$

GIỚI HẠN

Giới hạn của dãy số

$\lim \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$
$\lim q^n = 0$, với $\lvert q\rvert < 1$	$\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$
$\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$	$\lim c = c$ với c là hằng số

Giới hạn của hàm số

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan \alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, (a > 0)$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e (a > 0, a \neq 1)$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ
$\lim\limits_{x\to -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn	$\lim\limits_{x\to +\infty} c = c$ với c là hằng số
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ với c, k là hằng số, k nguyên dương	$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ với c, k là hằng số, k nguyên dương

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực của hàm số

1. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)\cdot g(x)$
   Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
L > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
L < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
L < 0	0	+	$-\infty$
		−	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, và $x \to -\infty$. Dấu của $g(x)$ xét trên khoảng đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$.

TÍCH PHÂN

Một số công thức nguyên hàm

1	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \lvert \frac{x-a}{x+a} \rvert + C \quad (a \neq 0)$
2	$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln \lvert x + \sqrt{x^2+a} \rvert + C$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2+a} \rvert + C$
4	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln \lvert \cos(ax+b) \rvert + C, (a \neq 0)$

Một số công thức tính tích phân của hàm đặc biệt

1	Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a, a]$ thì $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$
2	Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-a, a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
3	Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$
4	Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a, a]$ thì $$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int_0^a f(x)dx, m > 0$$
5	Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$
6	Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì $$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Bất đẳng thức tích phân

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$. Khi đó

1	Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2	Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3	Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
4	$\left\vert \int_a^b f(x)dx \right\vert \leq \int_a^b \vert f(x) \vert dx$
5	$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

LƯỢNG GIÁC

Một số công thức lượng giác

Công thức cộng	Công thức nhân đôi
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

Công thức biến đổi tích thành tổng	Công thức biến đổi tổng thành tích
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$ $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$	$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Giá trị lượng giác của các góc(cung) có liên quan đặc biệt

Hai góc đối nhau	Hai góc bù nhau
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

Hai góc hơn kém nhau π	Hai góc phụ nhau
$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$ $\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$ $\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

Bất đẳng thức lượng giác

1	$\lvert\sin x\rvert \le 1,\ \lvert\cos x\rvert \le 1$
2	$\sin^n x \le 1,\ \cos^n x \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
3	$\sin^n x \le \sin^2 x,\ \cos^n x \le \sin^2 x, \forall n \ge 2,\ n \in \mathbb{N}$
4	$\sqrt[2n]{\sin x} \ge \sin^2 x,\ \sqrt[2n]{\cos x} \ge \cos^2 x,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
5	Cho a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin x + b\cos x$ là $-\sqrt{a^2+b^2}$ Giá trị lớn nhất của hàm số $y = a\sin x + b\cos x$ là $\sqrt{a^2+b^2}$
6	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[2m]{\sin x} + \sqrt[2n]{\cos x}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ là 1
7	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x, (n \in \mathbb{N}^*)$ là $\frac{1}{2^{n-1}}$
8	Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^n x + \cos^n x$ $(n \ge 2, n \in \mathbb{N})$ là 1
9	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = tan^{2n} x + \cot^{2n} x$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ là 2

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HOA LƯ
HOA LU UNIVERSITY

LUỸ THỪA VÀ LÔGARIT

Công thức về luỹ thừa

Cho a, b là những số thực dương và α, β là những số thực tuỳ ý.

$a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$	$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$
$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$
Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$	Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Công thức về lôgarit

Cho các số dương a, b, c, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Số thực α.

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$	$\log_a(a^\alpha) = \alpha$; $a^{\log_a b} = b$
$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$	$\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$; $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$
$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\log_a a^\alpha = \alpha$ $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c \neq 1)$; $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b (\alpha \neq 0)$; $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} (b \neq 1)$

Đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit

$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$